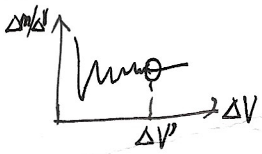
流体力学

1.流体力学绪论

流体：任意微小剪切力持续作用下发生连续变形的物质

特征体积：



~~的~~密度趋于稳定

流体质点：微小特征体，大量分子，确定宏观统计特性

连续介质模型：①最小实体 流体质点

②无间隙

条件：分子自由程 << 特征尺度

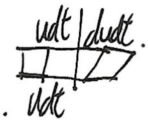
密度：$\rho = \frac{dm}{dV}$

比容 $v = \frac{1}{\rho}$

重度 $\gamma = \rho g$

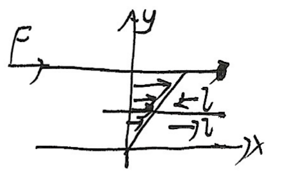
粘性：有相对运动时表现

牛顿内摩擦定律：$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d\theta}{dt}$



$\frac{du}{dy}$为速度梯度

方向：阻碍相对运动

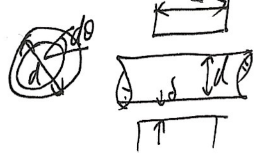


动力粘性系数 $\mu = \frac{\tau}{du/dy}$　　$T\uparrow \mu\downarrow$ 液体　　$T\uparrow \mu\uparrow$ 气体

运动粘性系数 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$　　因为 不反映真实粘性

理想流体：$\mu = 0$　　实际流体具有粘性

粘性例题1.



$dM = \frac{d}{2} dF$ (一条线)

$= \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} d\theta \cdot L \tau$

$M = \int_0^{2\pi} (\frac{d}{2})^2 \tau L d\theta$

$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{\pi d n}{60\delta}$　　$k = \frac{\pi n d}{60\delta}$

得 $\mu = \frac{120 M \delta}{d^3 \pi^2 n L}$

△ $\frac{du}{dy}$ 一般取 $\frac{V_{max}}{尺寸}$

体积压缩系数 $\beta_p = -\frac{dV/V}{dp}$　　$\beta_p\uparrow$，可压缩性$\uparrow$

体积弹性模量 $E_V = \frac{1}{\beta_p} = \frac{dp}{d\rho/\rho}$　　$E_V\uparrow$ 可压缩性$\downarrow$

液体体积弹性模量大，压缩性小。

气体：等温 $\frac{p}{\rho} = C \Rightarrow E_V = p$

等熵 $\frac{p}{\rho^k} = C \Rightarrow E_V = kp$　　(与过程有关)

eg. 空气标压 等熵压 50% 压强增加多少

$E_V = -\frac{dp}{dV/V} = kp$

$\therefore dV/V = -\frac{dp}{kp} \Rightarrow \ln\frac{V_2}{V_1} = -\frac{1}{k}\ln\frac{p_2}{p_1}$

$\Rightarrow p_2 = p_1 (\frac{V_2}{V_1})^{-k} = 2.67\times10^5 Pa$　　$R = 287$

$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} \rightarrow T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2} = 379.8K$

2.流体静力学

流体静压强 $p = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A}$　垂直作用面，指向流体内部

$p = f(x,y,z)$ 是作用点位置函数

静止流体平衡方程—欧拉平衡方程

$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$

静流体压强变化由质量力引起

$$\begin{cases} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \xRightarrow{偏导数} \begin{cases} \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \end{cases}$$

引入势函数

$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x}$　$f_y = -\frac{\partial W}{\partial y}$　$f_z = -\frac{\partial W}{\partial z}$

等压面 $p = const \Rightarrow W = const$.　等势面

等压面微分方程 $-dW = \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$.

当力为重力时，z为　　z正方向垂直向上

$\frac{dp}{dz} = -\rho g$、　　越正越大，越负越小.　非绝对值

Ⅰ 均质不可压缩流体

$p = -\rho g z + const$

压强作用于测压管高，

$z + \frac{p}{\gamma} = C$.　　z：位置水头　$\frac{p}{\gamma}$：测压管高.压强水头.

$z + \frac{p}{\gamma}$：测压管水头、水静能头

z：位置势能　p/γ 压强势能　$z + \frac{p}{\gamma}$：总势能

帕斯卡原理　$\delta p_1 = \delta p_2$，一点压强变化瞬间整个连通器.

Ⅱ 可压缩流体

$\frac{dp}{dz}=-\rho g$. 需 ρ, p 关系

气体 $p=\rho RT_0 \Rightarrow \frac{dp}{dz}=-\frac{p}{RT_0}g$

$p_2=p_1 e^{-\frac{g(z_2-z_1)}{RT_0}}$

压强测量. 表压有正有负. $p_m=p-p_a$

表压为负, 取其绝对值 真空压强 $p_v=p_a-p$.

单管测压计: 只能测液体, 且高于大气压

U型管: ① 作等压面

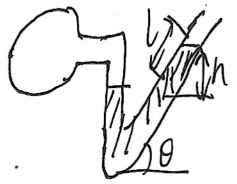
② 等高 两点在同一液体

③ 可测气体 $p_{Am}=\rho_2 g h_2+\cancel{\rho g h}\approx\rho_2 g h_2$

气体 忽略. $\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}=0$.

$p=const$.

差压计. 类似.



倾斜式测压计. $p=\rho_t g l\sin\theta-\rho g h_1$

$\frac{l}{h}=\frac{1}{\sin\theta}$ 提精度.

等角速转动液体平衡 (相对运动坐标系静止).

相对静止平衡微分方程.

$\vec f-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$

$(\vec g-\vec a)-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$

取z轴竖直向上为正.

$$\begin{cases}-a_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ -a_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\ -g-a_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{cases}$$ 惯性力负向

等角速转动液体

$dp=\rho\omega^2xdx+\rho\omega^2ydy-\rho gdz$.

自由面 $z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$.

$p=\frac{\rho}{2}\omega^2r^2-\rho gz+C=p_0+\rho g\underbrace{\left(\frac{\omega^2r^2}{2g}-z\right)}$ 淹深

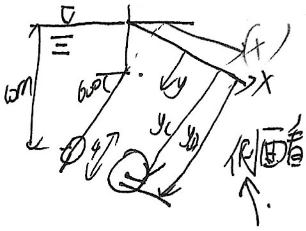
作用平板上流体静压力

① $F=(p_0+\rho gh_c)A$ 求力, 形心淹深.

② $y_D=y_c+\frac{I_{xc}}{y_cA}$ 求压力中心.

$x_D=x_c+\frac{I_{xyc}}{y_cA}$ 面积相对于过形心轴对称时. $x_D=x_c$

eg. 求总压力. 及力矩.



(1) $F=\rho g h_c A=1.23\times10^6N$.

(2) 压力中心 $y_D=y_c+\frac{I_{xc}}{y_cA}=11.64m$

内外侧各点压强(都是大气) 取表压强.

坐标系: 一般为截面所在方向延长至自由面, 且在水面.

(3) $M=F(y_D-y_c)=1.07\times10^5$ N·m

不是表压时.

$y_D=y_c+\frac{I_{xc}\rho g\sin\alpha}{(p_0+\rho g\sin\alpha\, y_c)A}$

3. 流体运动学基础

拉格朗日方法: 流体质点.

初时刻 (a,b,c). $y=y(a,b,c,t)$ 质点物理量

$\vec r=\vec r(a,b,c,t)$ $\vec v=\frac{\partial\vec r(a,b,c,t)}{\partial t}$ $\vec a=\frac{\partial\vec v}{\partial t}=\frac{\partial^2\vec r(a,b,c,t)}{\partial t^2}$

欧拉法: 空间点

空间点 (x,y,z) $y=y(x,y,z,t)$.

速度分布 $\vec v=\vec v(x,y,z,t)$. $p=p(x,y,z,t)$

$T=T(x,y,z,t)$

定常场: 每一点物理量不随时间变化. $\frac{\partial y}{\partial t}=0$. (欧拉

均匀场: 各点物理量一样. $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial z}=0$.

物质导数: 欧拉方法描述流体质点加速度

$\vec a=\underbrace{\frac{\partial\vec v}{\partial t}}_{\text{非定常}}+\underbrace{u\frac{\partial\vec v}{\partial x}+v\frac{\partial\vec v}{\partial y}+w\frac{\partial\vec v}{\partial z}}_{\text{非均匀}}$ 流体质点.

$\frac{DN}{Dt}=\frac{\partial N}{\partial t}+u\frac{\partial N}{\partial x}+v\frac{\partial N}{\partial y}+w\frac{\partial N}{\partial z}$

局部. 迁变.

不可压缩的描述 $\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$.

迹线. 流体质点轨迹. 拉格朗日下.

$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$.

流线: 假想曲线. 速度方向 切线. 欧拉下.

$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$. 不相交 转折

流线密 速度大

染色线: 通过同一空间点 流体质点 同一瞬时 连线.

定常流动条件下，流线迹线染色线重合

流管：封闭不自交C，一瞬时过该曲线上流线构成管状表面。

定常流动时 形状不变。

总流：流管内所有流线总和。

过流断面：所有流线相垂直截面

质量流量：单位时间通过流管过流断面的流体质量

$\dot{m}=\int_A \rho V dA$.

若速度定常均布

$\dot{m}=\rho V A$.

体积流量：单位时间 过流管 过流断面 流体体积.

$Q=\int_A V\cdot dA$.

速度均布

$Q=VA$.

平均速度：该速度通过流量=实际流量.

$\bar{V}=\frac{\int_A u dA}{A}$. 计流量准，动能动量计入误差.

流体微团运动变形

线变形：

x方向体积膨胀率：$\frac{\partial u}{\partial x}$

总体积膨胀率 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V}=\frac{1}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{dt}$.

不可压缩 $\nabla\cdot\vec{V}=0$. 散度为0

旋转.

$\omega_{OA}=\frac{\partial v}{\partial x}$

$\omega_{OB}=\frac{\partial u}{\partial y}$

绕z轴旋转角速度 $\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{V}$$

旋度. 方向约 逆时为正

无旋 $\vec{\omega}=0$.

角变形 $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$

4. 流体动力学基础

积分形式控制方程 微分形式控制方程

系统：某一确定流体质点集合总体(拉) 控制体：流场中某一确定空间区域(欧)

物质导数 $\frac{DN}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{sys}\phi d\tau$.

雷诺输运方程 $\frac{DN_{sys}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\phi d\tau+\int_{cs}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}ds$.

系统 控制体 流经控制体.

定常流动 $\frac{DN}{Dt}=\int_{cs}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}ds$.

运动控制体 $\frac{DN}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\phi d\tau+\int_{cs}\phi\vec{V_r}\cdot\vec{n}ds$ (相对速度)

区分：质点导数 $\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\phi$. 质点 空间点.

系统导数 $\frac{DN_{sys}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\phi d\tau+\int_{cs}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}ds$ 系统 控制体.

控制体积分方程.

① 连续方程 (质量守恒) $\frac{DM}{Dt}=0$.

$\frac{DM}{Dt}=0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho d\tau+\int_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds=0$.

定常 $\int_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds=0$. 不可压 $\int_{cs}\vec{V}\cdot\vec{n}ds=0$.

② 动量方程 (动量定理) 是矢量 $\sum\vec{F}=\frac{D\vec{K}}{Dt}$ (动量) $m\vec{V}$ 总和

$F=m\vec{V}=\rho V\vec{V}=\rho\vec{V}\cdot$

$\sum\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\vec{V}d\tau+\int_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{V}\vec{n}\cdot ds$.

分量 $\sum F_x=\sum(\dot{m}_iV_{xi})_{out}-\sum(\dot{m}_iV_{xi})_{in}$. 质量流量

$\sum F_y=\sum(\dot{m}_iV_{yi})_{out}-\sum(\dot{m}_iV_{yi})_{in}$ 方向注意.

$\sum F_z=\sum(\dot{m}_iV_{zi})_{out}-\sum(\dot{m}_iV_{zi})_{in}$

连续方程(速度) 伯努利方程(压强) 动量方程(作用力)

力速度方向与坐标轴正向同. 大气抵消

运动控制体.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\vec{V_r}\cdot d\tau+\int_{cs}\rho\vec{V_r}\cdot\vec{V_r}\cdot\vec{n}ds=\sum\vec{F}$. $\vec{V_r}=\vec{V}-\vec{V_{cv}}$

③ 动量矩方程(动量矩定理).

$\sum\vec{T}=\frac{D\vec{H}}{Dt}$. 积分形式 $\sum\vec{T}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\vec{r}\times\vec{V}\rho d\tau+\int_{cs}\vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds$

系统合力矩 $\vec{T}=\underbrace{\vec{r}\times\vec{F_s}}_{表面力}+\int_{\tau}\underbrace{\vec{r}\times\vec{g}}_{质量力}\rho d\tau+\vec{T}_{轴}$.

$\vec{T}_{轴}$ 为轴上一起.

定常忽略表面力 质量力 $\vec{T}_{轴}=\int_{cs}\vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds$.

有限区域积分 $\vec{T}_{轴}=\dot{m}(\vec{r_2}\times\vec{V_2}-\vec{r_1}\times\vec{V_1})$.

z轴转轴重合. $T_{轴}=\dot{m}(r_2V_{\theta2}-r_1V_{\theta1})$.

$T_{轴}$, V_θ 与转动方向相同取正.

T轴>0. 输入能量　　T轴<0. 输出能量

④ 能量方程

$$\frac{DE}{Dt}=\dot{Q}+\dot{W}$$

初始条件.

$$\dot{Q}+\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho e\,dV+\int_{cs}\rho e\vec{V}\cdot\vec{n}\,ds$$

微分形式连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$ 质量守恒.

定常: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$ 流出控制体质量流量0. (物质导数)

不可压 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ △ 流出控制体体积流量0 散度为0

这里控制体时充满的. 不是有进入的.

eg. $\vec{V}=(4x^2+2y+xy)\vec{i}+(3x-y^2+z)\vec{j}$.

(1) (2,2,3) 加速度 (2). 几维流动/压缩 (3) 定常否.

$u=4x^2+2y+xy$　$v=3x-y^2+z$

$\vec{a}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}$ $\boxed{\text{加速度概念}}$

$=0+(4x^2+2y+xy)\cdot((8x+y)\vec{i}+3\vec{j})$

$+(3x-y^2+z)((2+x)\vec{i}+(-2y)\vec{j})$

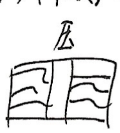
代入(2,2,3). $324\vec{i}+24\vec{j}$.

(2) 三维. z有关 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=8x-y\neq0.$

不是.

(3) 定常 t无关.

质量流量为0, 体积流量不一定为0. (不等ρ)



体积不为0.
进多少出多少 (稳态).

两个条件非递进. 实平行

粘性流体应力. 法向应力σ_n 切向应力τ_n

N-S方程. ~~[illegible]~~

微分形式动量方程. ①.

是: $\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=\rho g_x+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$

$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})=\rho g_y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}$

$\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=\rho g_z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}$

Stokes假设 ① 应力与变形速度线性
② 流体内各向同性.
③ 静止流体切应力0. 法应力 $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-p$.

本构方程.

应力与变形速度关系.

法向应力. $\begin{cases}\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\\ \sigma_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\\ \sigma_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\end{cases}$ 满足假设

$p=-\frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$. 压强.

切向应力 $\begin{cases}\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z})\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\end{cases}$ 满足假设. 与角变形率正比

代入可得.

微分形式动量方程 ② N-S方程

$$\begin{cases}\rho\frac{Du}{Dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}[2\mu(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V})]+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})]+\frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z})]\\ \rho\frac{Dv}{Dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})]+\frac{\partial}{\partial y}[2\mu(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V})]+\frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z})]\\ \rho\frac{Dw}{Dt}=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z})]+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z})]+\frac{\partial}{\partial z}[2\mu(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V})]\end{cases}$$

当不可压流体, 且μ为常数.

$$\begin{cases}\frac{Du}{Dt}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2})\\ \frac{Dv}{Dt}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2})\\ \frac{Dw}{Dt}=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2})\end{cases}$$

$\nu=\frac{\mu}{\rho}$ 运动粘性系数

当$\mu=0$. 理想流体欧拉运动方程.

$$\begin{cases}\frac{Du}{Dt}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{Dv}{Dt}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{Dw}{Dt}=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{cases}$$

基于: 质量×加速度=流体微团受到的外力

N-S方程 $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}$ 不可压且μ常数.

欧拉运动 $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p$. ($\mu=0$. 理想欧拉运动方程)

欧拉平衡方程. $0=\rho\vec{f}-\nabla p$. 平衡时. 压强体力平衡

不可压、可变密度 $\begin{cases}\text{连续方程. } \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0.\ 1个 & \text{(微分形式连续方程)}\\ \text{动量方程 } \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}.\ 3个 & \text{(微分形式动量方程②) (不可压简化)}\end{cases}$

p,u,v,w 4个未知数. 4个方程. 封闭.

初始条件：非定常 t=0时物理量场
边界条件：固壁 液面
进出口 无穷远
液体相界面 速度 压强 粘性 压力 连续

5. 相似原理与量纲分析

力学相似

① 几何相似：相似边界 线性尺寸同一比例

$$\frac{L_{1m}}{L_{1p}}=\frac{L_{2m}}{L_{2p}}=\cdots=C_L$$

非线性尺寸

$$\frac{A_m}{A_p}=\frac{L_m^2}{L_p^2}=C_L^2 \qquad \frac{V_m}{V_p}=\frac{L_m^3}{L_p^3}=C_L^3$$

线性成比例 夹角等

② 运动相似：满足几何相似
对应瞬时空间点
流速大小成比例

$$\frac{V_{1m}}{V_{1p}}=\frac{V_{2m}}{V_{2p}}=\cdots=C_V$$

通过对应距离时间相似

$$\frac{t_m}{t_p}=\frac{L_m/V_m}{L_p/V_p}=\frac{C_L}{C_V}=C_t$$

加速度相似

$$\frac{a_m}{a_p}=\frac{V_m/t_m}{V_p/t_p}=\frac{C_V}{C_t}=C_a$$

流线几何相似

③ 动力相似：满足几何相似
对应瞬时空间点
作用力种类相同 同名力
方向同，大小成比例

$$\frac{F_{1m}}{F_{1p}}=\frac{F_{2m}}{F_{2p}}=\cdots=C_F \quad \text{作用力比例系数}$$

相似准则
几何相似 动力相似 对应准则数等

准则数（惯性力与某种力的比）

I 雷诺准则 惯性力粘性力的比 $Re=\frac{\rho V L}{\mu}=\frac{VL}{\nu}$ 粘性流动
管流，飞行器，潜艇阻力
绕流

II 弗劳德准则 惯性力与重力的比 $Fr=\frac{V}{\sqrt{gL}}$ 自由液面流动
船舶运动 明渠流，液体表面波动

III 欧拉准则 压力与惯性力的比 $Eu=\frac{\Delta p}{\rho V^2}$ 压力压差影响大
空化效应 空蚀现象

IV 马赫准则 惯性力与弹性力的比 $Ma=\frac{V}{c}$ 可压缩流动
高速流动

V. 韦伯准则 惯性力与表面张力的比 $We=\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$ 冷凝 沸腾

动力相似应满足 Fr, Eu, Re, Ma, We 都相等
而实际上不能同时满足 十分困难甚至不可能

VI. ~~如 Re 与 Fr 等~~ 牛顿相似准则：动力相似充要条件

$$\cancel{\frac{V_n}{V_m}\ \ \frac{L_n}{L_m}\ \ \frac{v_n}{v_m}} \qquad \frac{F_p}{\rho_p l_p^2 V_p^2}=\frac{F_m}{\rho_m l_m^2 V_m^2}$$

相似性质：相同微分方程组 连续 N-S 能量 状态 （条件一）
单值条件相似 （条件二）
准则数相等 （条件三）

完全相似 全部准则数等 只有模型实物尺寸同才有可能 △
部分相似 主导准则数

流动相似 $\left(\frac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_m=\left(\frac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_p$ 计算出力用

量纲分析 长度 L
质量 M
时间 t

1. 瑞利法
某一物理过程与n个物理量有关

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n)=0$$

$$x_i=K\underbrace{x_1^a x_2^b x_{i-1}^c x_{i+1}^d \cdots x_n^m}_{n-1\text{次}} \quad \text{其它量}$$

处理3个有关以下 条件较数

2. π定理法
物理方程 $f(x_1, x_2 \cdots, x_n)=0$ m个基本 组合$(n-m)$个无量纲数

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-m})=0$$

$$\pi_1=\frac{x_4}{x_1^{a_1}x_2^{b_1}x_3^{c_1}} \quad \pi_2=\frac{x_5}{x_1^{a_2}x_2^{b_2}x_3^{c_2}} \quad \pi_{n-3}=\frac{x_n}{x_1^{a_{n-3}}x_2^{b_{n-3}}x_3^{c_{n-3}}}$$

x_1, x_2, x_3 表征流体特性 几何特性 运动特征 相互独立

(4). 步骤.

1. 找出有影响的 n 个物理量 写成函数形式.
2. 选 m 个独立基本量　一般 m=3.
3. n-m 个基本量 组无量纲项.
4. 求指数 定 a, b, c
5. 写 $F(\pi_1, \pi_2 \cdots \pi_{n-m}) = 0$.

eg. 绕流阻力 D 与 ρ, μ, d, V_∞ 有关.

推导 D.

选 ρ, d, V_∞.

$\pi_1 = \frac{D}{\rho^{a_1} d^{b_1} V_\infty^{c_1}}$　$LT^{-2}M$　$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho^{a_2} d^{b_2} V_\infty^{c_2}}$

解得. $a_1=1$　$b_1=2$　$c_1=2$.

$\pi_1 = \frac{D}{\rho d^2 V^2}$　$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho d V_\infty}$

写出 $F\left(\frac{D}{\rho d^2 V_\infty^2}, Re^{-1}\right) = 0 \Rightarrow$

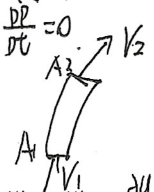
$D = f(Re)\rho d^2 V_\infty^2 = f(Re)\frac{8}{\pi}\frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho V_\infty^2}{2}$

$= C_d A \frac{\rho V_\infty^2}{2}$

6. 理想不可压流体定常流动.　理想 不可压. 定常

一元流动:　理想 $\mu=0$　定常 $\frac{\partial}{\partial t}=0$.　不可压 $\frac{D\rho}{Dt}=0$

均布 平均.



连续方程.　$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$

动量方程.　(N-S 退化)

$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ (1)

$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ (2)

$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$ (3)

(1) $\times dx$ + (2) $\times dy$ + (3) $\times dz$. 沿 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ 流线积分

得力势函数 Π.　$f_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$　$f_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$　$f_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$

$d\Pi + \frac{1}{\rho}dp + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$.

当只受力只有重力.　$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -f_z = g \Rightarrow \Pi = gz + C$

得到

伯努利方程　$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C$　单位质量　沿流线

$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = C$　单位重量

适用: 理想 不可压. 定常. 有势. 流线. 无能量输入输出

$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C$.　　$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = C$ 总能头

单位质量动能　单位质量势能　单位质量压强势能　　速度头　位置头　静压头

总流伯努利方程.

$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$　$\alpha = \frac{\int_A V^3 dA}{V^3 A}$ 动能修正系数

对于圆管内充分发展层流 $\alpha = 2$.

对于大 Re. 管内湍流　$\alpha = 1$.

适用条件: ① 两过流断面必须是缓变流过流断面. 断面内可任选. 无能量输入输出

取同一点 $z, \frac{p}{\rho g}$

有能量变化. $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{轴}$.　负 输入 正 输出

功率　$W = \rho g Q h_{轴}$.

伯努利应用: 毕托管.　$V_1 = \sqrt{2gh}$.

文丘里流量计.　$Q = A_2\sqrt{\frac{2gh(\rho_0 - \rho)}{\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\rho}}$　(斜放可用. ρ_0 工作液密度)

平面势流

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

不可压. 连续

动量. 忽略质量力.

势流伯努利方程 (位于同一高度 z).

$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C$.

条件: 理想 不可压. 无旋. 忽略质量力.

流函数: 条件. $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. 即. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. 不可压条件.

$\boxed{不可压即有流函数}$　$d\psi = -v\,dx + u\,dy$.

直角坐标下.　$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$　$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

极坐标系下　$V_r = \frac{\partial \psi}{r\partial \theta}$　$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

等流函数线 $d\psi = 0$. 即为二元流线　$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$.

流量 $Q = \psi_B - \psi_A$.

势流条件.　$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \overset{无旋}{=} 0$.　有 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$. (L 方程)

速度势函数　$d\phi = u\,dx + v\,dy$

无旋流动　$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

直角坐标　$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$　$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

极坐标系　$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$　$V_\theta = \frac{\partial \phi}{r\partial \theta}$.

条件：无旋流动

速度沿曲线积分与路径无关．速度场有势

等势线 $d\varphi = udx+vdy=0$　流网：φ,ψ 的正交网

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\varphi = -\frac{u}{v}$　$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = \frac{v}{u}$.

流线与等势函数线相互垂直

当不可压缩时．（与流函数 非涡性无关）

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$

不可压时．势函数满足拉普拉斯方程．

$$\begin{cases} u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$
柯西黎曼条件．

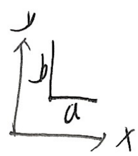
复势函数 $F(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$

基本平面势流．

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$．$\varphi_1,\varphi_2$ 是解 $k_1\varphi_1+k_2\varphi_2$ 也是

I．均匀直线流动．

速度势函数 $\varphi=ax+by$.
$u=a$　$v=b$.



流函数　$\psi=-bx+ay$

压强处处相同

II．点源和点汇

速度势函数　$\varphi=\frac{A}{2\pi}\ln r$

速度分布　$v_r=\frac{A}{2\pi r}$　$v_\theta=0$.

流函数．$\psi=\frac{A}{2\pi}\theta$.

$A>0$. 点源（向外）$A<0$ 点汇（向里）

A：点源（汇）强度　$A=Q$

通过任一半径 r 且原点在圆心 圆周

流体体积流量

压强．$p=p_0-\frac{\rho Q^2}{8\pi^2r^2}$　（中心速度大，p小）

III 点涡．

速度势函数　$\varphi=\frac{A}{2\pi}\theta$.

速度分布　$v_r=0$　$v_\theta=\frac{A}{2\pi r}$．沿切向

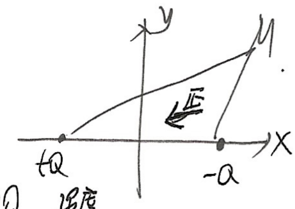
流函数　$\psi=-\frac{A}{2\pi}\ln r$.

A：点涡强度　$A=\Gamma$　包围点涡 闭周线速度环量

$A>0$．逆时针　$A<0$ 顺时针

压强分布：$p=p_0-\frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2r^2}$　中心最小（v 最快）

IV．偶极流．



流函数 $\psi=\frac{Q}{2\pi}(\theta_2-\theta_1)$.

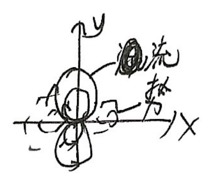
速度势函数 $\varphi=\frac{Q}{2\pi}(\ln r_2-\ln r_1)$

点源点汇距 $2a$.　$M=2aQ$ 强度．

速度势 $\varphi=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$　由[illegible]导出．

流 $\psi=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$

正方向：由汇指向源



流线 $\psi=C$　$x^2+\left(y+\frac{M}{4\pi C}\right)^2=\left(\frac{M}{4\pi C}\right)^2$.

等势线 $\varphi=C$　$\left(x-\frac{M}{4\pi C}\right)^2+y^2=\left(\frac{M}{4\pi C}\right)^2$.

速度分布 $v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{M}{2\pi r^2}\cos\theta$.

$v_\theta=\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=-\frac{M}{2\pi r^2}\sin\theta$.　$v=\frac{M}{2\pi r^2}$.

压强分布．$p=p_0-\frac{\rho M^2}{8\pi^2r^4}$　中间最小．

绕圆柱无环量绕流　X正向直线流动＋原点偶极流．

速度势函数 $\psi=V_\infty r\sin\theta-\frac{M}{2\pi r}\sin\theta$.

流函数 $\varphi=V_\infty r\cos\theta+\frac{M}{2\pi r}\cos\theta$.

$\psi=0$.　$\theta=0$ 或 $\theta=\pi$．或 $r=\left(\frac{M}{2\pi V_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}=R$.

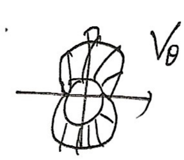
由 X轴和圆组成．

速度分布．$v_r=V_\infty\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$

$v_\theta=-V_\infty\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$.

1．无穷远处　$v_r=V_\infty\cos\theta$　$v_\theta=-V_\infty\sin\theta$.

2．圆柱表面　$v_r=0$.　$v_\theta=-2V_\infty\sin\theta$.



$\theta=0,\pi$ 驻点　$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ [illegible]点．

压强 $p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2-\frac{1}{2}\rho(4V_\infty^2\sin^2\theta)$

压强系数 $\bar{p}=1-4\sin^2\theta$

与实际有合力矛盾（无粘性）　引入有环量绕流

绕圆柱有环量绕流

无环量＋点涡．

$\phi = V_\infty\left(r+\frac{R^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$.

$\psi = V_\infty\left(r-\frac{R^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$

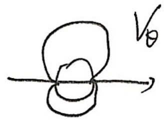
速度分布

$V_r = V_\infty\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$

$V_\theta = -V_\infty\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$

表面 $V_r=0$

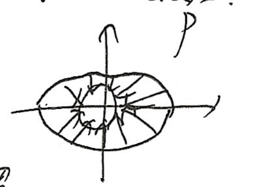
$V_\theta = -2V_\infty\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$



驻点: $\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi R V_\infty}$. 当 $\sin\theta>1$. 驻点在外.

柱面压强分布 $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[V_\infty^2 - \left(2V_\infty\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$.

产生垂直来流的力.



升力: 库塔-儒可夫斯基升力定理

$F_y = \rho V_\infty \Gamma$. 方向: 来流矢量逆环量转90° (逆环量旋)

马格努斯效应: 受垂直来流侧向力. 实际流体 $C_L\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$ 升力系数.

此时 无旋. 不可压. $\mu=0$. 旋是旋涡, 旋度

7. 通道内的粘性流动.

粘性. 不可压. 定常

湍流: 物理量对时间有不规则随机脉动.

随机三维 非定常 有旋流动.

判据: $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$

$Re_{cr} < 2100$ 层流

$Re_{cr} > 4000$ 湍流

Re小. 粘性力主导. 稳定. Re大 惯性力导致不稳.

过渡区: 湍栓, 分叉

起始段与充分发展段

起始 $u=u(r,x)$ 充分. $u=u(r)$ 与x无关

起始段长度 l_e. 层流: $l_e = 120D$.

湍流: $l_e = 25D \sim 40D$.

两无限大平板充分发展层流. 粘性 均匀不可压 定常 $p=const$, $\frac{\partial}{\partial t}=0$

N-S + 连续 + 边界 { 固面无滑移; 相界面压力, 粘性应力连续

定常 充分发展层流. $\frac{\partial}{\partial t}=0$. $V=W=0$.

不可压. $\rho=const$.

无限大 $\frac{\partial}{\partial z}=0$. 温度不变 ($\mu$) $\mu=const$.

体积力. 重力 $g_y=-g$.

⇓

连续方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow u=u(y)$

N-S方程 $\rho\frac{DV}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu\nabla^2 V$.

$$\begin{cases} 0 = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

⇓

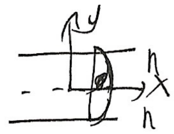
$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2$.

当 恒定压差 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 定 — 泊肃叶流.

定解 $y=\pm h$ $u=0$ (边界无滑移).

$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2-h^2)$. 若距L降 Δp

$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{L}(h^2-y^2)$

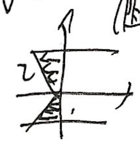


最大速 $u_{max} = u(y=0) = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{L}$.

体积流量 $Q = \int u\,dA = \frac{2}{3}\frac{h^3}{\mu}\frac{\Delta p}{L}$.

平均速度 $V = \frac{Q}{A} = \frac{h^2\Delta p}{3\mu L} \Rightarrow u_{max} = 1.5V$. (固壁作用)

切应力. $\tau = \mp\mu\frac{du}{dy} = \pm\frac{\Delta p}{L}y$ 流动反.

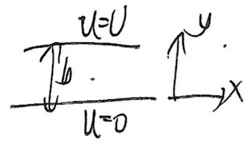


压强分布. $p = p_0 - \rho g y + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot x$. $p = -\rho g y + f(x)$

x方向粘力平衡压力 ⇒ 粘性力导致压强变化.

y方向重力与压力平衡 ⇒ 重力导致压强变化.

一般库埃特流动



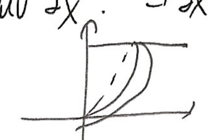
定解 $y=0$ $u=0$. $y=b$ $u=U$.

$\frac{u}{U} = \frac{y}{b} + \left[-\frac{b^2}{2\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}\right]\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right) = \frac{y}{b} + P\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$

无量纲压强梯度 P

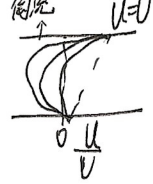
$\therefore P = -\frac{b^2}{2\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}$. 当 $\frac{\partial p}{\partial x}=0$. $u=\frac{y}{b}U$ 纯剪切流.

$\frac{\partial p}{\partial x}<0$.



每点大于纯剪切流. 顺压

$\frac{\partial p}{\partial x}>0$.



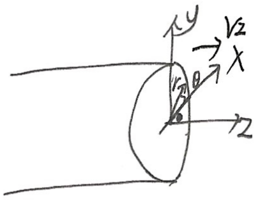
直线与抛物线相减. 边界处出现倒流. 逆压

理想流体不粘壁 纯剪切流是有粘性. 只是无压强降

圆管内充分发展层流：仅重力，水平，不可压，充分发展，定常，层流

$\frac{\partial}{\partial t}=0$　$v_r=v_\theta=0$.　$\rho=const$.　$\frac{\partial v_z}{\partial \theta}=0$（层流条件）

$g_r=-g\sin\theta$　$g_\theta=-g\cos\theta$　$g_z=0$.



连续方程　$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}}+\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$.
　　　　0　　　0　⇓

$\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$.

动量微分方程：（化简后）
$$\begin{cases} 0=-g\cos\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} & \theta向 \\ 0=-g\sin\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} & r向 \\ 0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) & z向 \end{cases}$$

解得　$v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2+C_1\ln r+C_2$.

＋定解条件　$r=R \Rightarrow v_z=0$
　　　　　　$r=0 \Rightarrow v_z$有限（$C_1=0$

$\therefore v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2-R^2)$.

令相距l两点压降Δp．降为正（Δ号）

$v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}(R^2-r^2)$

体积流量　$Q=\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}$　哈根-伯肃叶定律

$\mu=\frac{\pi R^4\Delta p}{8Ql}$　粘度表达式．

截面最大速度　$v_{z\max}=\frac{R^2}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}$．（与平板2倍对比　平板$\frac{1}{2}$

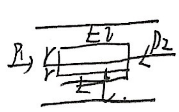
截面平均速度　$v_{z\max}=2\bar{v}_z$.

压强分布．$p=-\rho g r\sin\theta+\frac{\partial p}{\partial z}z+C$

设$z=0$ $r=0$时 $p=p_0$．$p=p_0-\rho g r\sin\theta+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot z$
（在管中心）

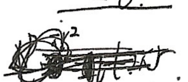
切应力．$\tau=\frac{\Delta p}{2l}r$．当$r=R$（壁）$\tau_w=\frac{\Delta p}{2l}R \Rightarrow \tau=\frac{r}{R}\tau_w$

△ 圆管过流断面切应力线性分布．
层流、紊流均可用



宏观平衡．
实际组成不同．
都是线性

控制体压降 切应力平衡



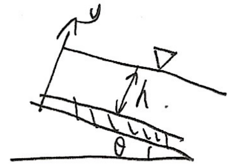
$\Delta p\cdot\pi r^2=2\tau l\cdot\pi r$

$\tau=\frac{\Delta p}{2l}r=-\mu\frac{dv_z}{dr}$　（坐标负正向）（方向一致　正的为反向）
　压降为正

$v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}(R^2-r^2)$　（平板$\frac{1}{2}$倍）

层流．降膜流动．不可压缩．表面大气接触．定常．层流．

重力驱动．液膜一侧大气接触
无差异



定常层流　$V=u(y)$．$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}=0$.

连续方程．$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow u=u(y)$.
N-S方程　$0=\rho g\sin\theta-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}$.
　　　　$0=-\rho g\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial y}$
　　　　$0=\frac{\partial p}{\partial z}$.

表面大气p_0　$p=-\rho g(y-h)\cos\theta+p_0$

$\frac{\partial p}{\partial x}=0$．$\Rightarrow$　$u=-\frac{\rho g\sin\theta}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$

定解条件：$y=0$ $u=0$　$y=h$ $\frac{du}{dy}=0$.

速度分布 $u=\frac{\rho g\sin\theta}{\mu}y\left(h-\frac{y}{2}\right)$.

体积流量 $dQ=u\,dy$　　$Q=\frac{\rho g\sin\theta}{3\mu}h^3$.

圆管内充分发展紊流．

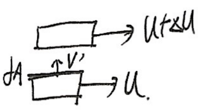
时均速度　$\bar{u}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}u(t)dt$.　物理量定义同理
脉动速度　$u'=u-\bar{u}$
脉动压，时均物理量两侧分布机会均等 $\overline{p'}=0$.
紊乱度　$\varepsilon=\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$　$\overline{u'^2}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}(u')^2dt$

与脉动幅度正相关．

此时定常，指时均参数不随时间变化，准定常

层流有．$\tau_{lam}=\mu\frac{du}{dy}$　紊流附加雷诺应力

附加应力：单位时间过δA流体动量时均值



$\overline{\rho v'\delta A(\bar{u}+u')}=\rho\overline{u'v'}\delta A$.　上下相

$\bar{v}=0$.
均值　脉动


质点 下→上 $v'>0$．$u'<0$　$\overline{u'v'}<0$.
　向上$v'>0$．造成上层速度减小的脉动．

上→下 $v'<0$　$u'>0$．正的脉动．给另一层造成影响
$\overline{u'v'}$总为负．正的应力 $-\rho\overline{u'v'}$．　（管中心为基点）

由于动量通量等价作用大小相似应力．故$-\rho\overline{u'v'}$.

紊流切应力　$\tau=\mu\frac{d\bar{u}}{dy}-\rho\overline{u'v'}$　有．△ 时均值正方向．紊流特性

两部分组成 $\overline{u'v'}$ 在性质上 $\bar{u}$

圆管紊流结构 

层流底层厚度 $\delta = \frac{32.8d}{Re\sqrt{f}}$ Re大 越薄.

应力张量.
$$\begin{bmatrix} \bar\sigma_{xx} & \bar\tau_{xy} & \bar\tau_{xz} \\ \bar\tau_{yx} & \bar\sigma_{yy} & \bar\tau_{yz} \\ \bar\tau_{zx} & \bar\tau_{zy} & \bar\sigma_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{u'w'} & -\rho\overline{v'w'} & -\rho\overline{w'^2} \end{bmatrix}$$
实际6个独立.

半经验紊流模型

I. Bousinesq 涡粘性系数 $-\rho\overline{u'v'} = \eta\frac{d\bar u}{dy}$ η与流动结构 流动条件有关

II. 零方程. 补代数. $\eta = \rho l_m^2\left|\frac{d\bar u}{dy}\right|$ $l_m = ky$ 混合长度.

III. k-ε $\eta = C_\mu\rho\frac{k^2}{\varepsilon}$ $k = \frac12\overline{(u'^2+v'^2+w'^2)}$ 紊动能.

$$\varepsilon = \nu\overline{\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right]}$$ 紊动能耗散率

速度分布 $\frac{\bar u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}$ $y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \le 5$. (y到壁面距离)

$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 摩擦速度

$\delta_s = \frac{5\nu}{u_*}$ 底层厚度(层流)

过渡区 $5 < y^+ < 30$.

底层 $y^+ \le 5$.

紊流核心区 $y^+ \ge 30$.

核心区: I. 对数分布 $\frac{\bar u}{u_*} = 2.5\ln\frac{yu_*}{\nu}+5.5$.

管中心. $\frac{U-\bar u}{u_*} = 2.5\ln\frac{R}{y}$

II. 幂次分布 (光滑圆管). $\frac{\bar u}{U} = \left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac1n}$ $n=7$ Re $=1.1\times10^5$

壁面中心差. n与Re有关.

平均速度与中心比值

$n=6$ $\frac{V}{U}=0.79$ $Re=4\times10^3$

$n=10$ $\frac{V}{U}=0.87$ $Re=3.24\times10^6$

总流伯努利方程. $p_1>p_2$. 克服粘性阻力 ⇒ 消耗机械能 {位能 压力能 动能.

实际. $z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g} = z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+h_w'$.

单位重量 $\frac{\alpha_1\bar V_1^2}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\rho g} = \frac{\alpha_2\bar V_2^2}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\rho g}+h_w$. 水力损失.

α由流态决定. 层流2. 紊流1.

沿程损失:

水力损失(单位重量) h_{LT} {沿程 h_L 充分发展. 粘性摩擦. 局部 h_j. 相互碰撞 形成旋涡.

沿程损失: 充分发展. $V_1=V_2$ $\alpha_1=\alpha_2$ $z_1=z_2$.

$h_L = \frac{\Delta p}{\rho g}$. $\Delta p = f(V, D, L, \mu, \rho, \Delta)$

$h_L = f\frac{L}{D}\frac{\bar V^2}{2g}$ 达西公式.

适用任何放置. 任何截面. 充分发展层流和紊流

$\Delta p = \frac12\rho f\frac{L}{D}\bar V^2$. 适用水平管

非水平的直圆管内压降 $\Delta p = \rho g(z_2-z_1)+f\frac{L}{D}\frac12\rho\bar V^2$.

圆管内层流摩擦系数

沿程损失系数 $f=\frac{64}{Re}$. Δ小时与Δ无关.

$\Delta<\delta_s$. 水力光滑. $\Delta\ge\delta_s$ $\Delta>\delta_s$. 水力粗糙

粗糙度. $f=f(Re)$ $f=f(Re, \frac{\Delta}{D})$.

水力光滑管. 勃拉修斯公式. $f=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}$

紊流时: 科尔布鲁克公式. $\frac{1}{\sqrt f} = -2\lg\left(\frac{\Delta/D}{3.7}+\frac{2.51}{Re\sqrt f}\right)$. 叠代.

显式. $f=0.11\left(\frac{68}{Re}+\frac{\Delta}{D}\right)^{0.25}$

莫迪图

非圆管沿程损失

当量直径 $d_h=\frac{4A}{P}$ 一湿周. 与固体接触长.

矩形 $d_h=\frac{2ab}{a+b}$ 环 $d_h=\frac{4A}{P}=D_2-D_1$

等边三角 $d_h=\frac{\sqrt3}{3}a$. $h_L=f\frac{L}{d_h}\frac{V^2}{2g}$.

层流时. $f=\frac{C}{Re_h}$ C—形状因子.

局部损失: $h_j = \zeta\frac{\bar V^2}{2g}$. 局部损失系数.

与几何/Re有关. Re大时无关

突扩 $h_j=\zeta_1\frac{V_1^2}{2g}$ $\zeta_1=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2$. V_1为小截面速度

或 $h_j=\zeta_2\frac{V_2^2}{2g}$. $\zeta_2=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2$. V_2为大截面速度.

突缩 $h_j=\zeta\frac{V_2^2}{2g}$. $\zeta=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)$ V_2为小截面

管道. 串联 $h_{LT}=h_{LT1}+h_{LT2}+h_{LT3}$.

并联 $h_{LT}=h_{LT1}=h_{LT2}=h_{LT3}$

由连续方程 伯努利方程 水力损失方程 计算

$Q \Rightarrow V \Rightarrow Re, \Delta/D \Rightarrow f \Rightarrow h_L$

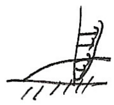
迭代求近似解. 是一种方法.   假设: 由于[不动]

8. 粘性不可压缩流体绕物体流动

{内流: 固壁限定空间内流动　　管流 通道流
{外流: 流体外部流过.　　飞机

边界层: 高Re　Re大.

近壁区: $\frac{\partial u}{\partial y}$ 很大　粘性, 有旋.



外部流动梯度小. 忽粘性.

高Re { 边界层　粘性有旋.
　　　 外部势流　无旋
　　　 尾流.　粘性有旋.

I 名义厚度 $\delta(x)$. 外法线上势流速度 99% 处.

沿流动方向一直增大.

II 位移厚度: 质量流量减少

$$U\cdot\delta^* = \int_0^\infty (U-u)dy$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \quad (\text{用}\rho\text{简化})$$

粘性减少流量 = 外移 δ^* 流量

III. 动量损失厚度. 动量流量减少

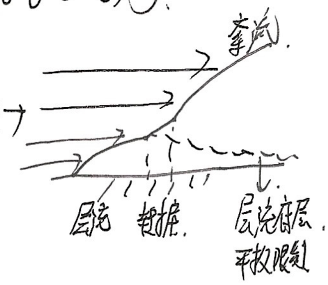
$$(\rho U\theta)U = \int_0^\infty \rho u(U-u)\,dy. \quad (\text{实际 } \dot m=\rho u)$$

粘性少动量流量 = ρU 流过面积 θ 动量

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

边界层流动状态.

层流边界 → 转捩 → 紊流.



判据.

$$\begin{cases} Re_x = \frac{Ux}{\nu} \\ Re_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \end{cases} \quad \begin{cases} (Re_x)_{cr} = 3\times10^5 \sim 3\times10^6 \\ (Re_\delta)_{cr} = 4\times10^3 \end{cases}$$

顺流平板.

有旋. 梯度大. 外缘不重流线. 多流态.

边界层动量积分: 定常不可压二元边界 曲率小.

CV外力和 = 净流出CV动量流率.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u\, dy\right) = -\tau_w - \delta\frac{dp}{dx}$$

不可压定常 二元.

层流 紊流 均可.

外部势流时: $\rho\frac{d}{dx}(U^2\theta)+\rho\frac{dU}{dx}U\delta^* = \tau_w$.　　合力平衡得出.

或 $\frac{d\theta}{dx}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\theta+\delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$. 使用

令 $H=\frac{\delta^*}{\theta}$.

$$\frac{d\theta}{dx}+\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}(2+H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}.$$

求解需. 壁面切应力及速度分布.

速度分布: I 无滑移　$y=0 \Rightarrow u=0, v=0$　$\tau=\tau_w$

II 外缘衔接. $y=\delta \Rightarrow u=U$　$\tau=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.　衔接.

III $y=0$ $u,v=0 \Rightarrow$ 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}$,　$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$ (计算结果).

顺流平板层流边界层: $V_\infty=C$. $p_\infty=C$.　顺流. 曲率小. $\frac{\partial p}{\partial y}=0$ (伯努利)

粘性 不可压. 定常 二元. 极小.　$\frac{dp}{dx}=\frac{dU}{dx}=0$.　外缘U

$$\frac{d\theta}{dx} + \boxed{\frac{dU}{dx}(2\theta+\delta^*)} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

三个未知数 { u 补充, τ_w 补充, δ.

$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho U^2}$. 即.

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

补充方程: I 速度分布　$u=a+by+cy^2+dy^3$ (三次假设)

无滑移 $y=0$ $u=0 \Rightarrow a=0$

衔接 $y=\delta$ $u=V_\infty$

$y=\delta$ $\tau=0$.

$y=0$. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}=0$.

$$u=\frac{V_\infty}{2\delta}\left(3y-\frac{y^3}{\delta^2}\right)$$

II 壁面切应力

$$\tau_w=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} \Rightarrow \tau_w=\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{\delta}.$$

三个未知数 一个方程. 由于补充本构方程.

u表 → τ代 → 得 δ.

代入积分. $\frac{1}{2}\delta^2=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho V_\infty}x+C$ 且有

$x=0$ $\delta=0$.　∴ $\delta=4.641\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_\infty}x} = 4.641\frac{x}{\sqrt{Re_x}}$

流体性质 来流速度 与距离

代入 $\tau_w=0.3232\sqrt{\frac{\mu\rho V_\infty^3}{x}}$.

截止这么长Re.

$x\rightarrow\uparrow$ 切应力↓.

壁面切应力 $D=\int_0^l \tau_w b\,dx = 0.6464\sqrt{\mu\rho V_\infty^3 l}\,b$.

阻力 $=C_D\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$. 其中 $C_D=1.293\frac{1}{\sqrt{Re_l}}$.